

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.02.2025.34>
УДК 519.6:004.93

До питання розв'язання задач комбінаторної оптимізації

Юхименко БірUTE Іонівна¹⁾

Канд. економіч. наук, доцент каф. Прикладної математики та інформаційних технологій
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2607-4687>; yukhymenko@op.edu.ua

Мундрієвський Олександр Володимирович¹⁾

Магістр каф. Прикладної математики та інформаційних технологій
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3525-3580>; 2388073@stud.op.edu.ua

¹⁾ Національний університет «Одеська політехніка», пр. Шевченка, 1. Одеса, 65044, Україна

АНОТАЦІЯ

Ця робота присвячена дослідженню дискретних оптимізаційних задач, які широко застосовуються в промисловості, логістиці, транспортних системах та інформаційних технологіях. Дослідження є важливим через складність таких задач і необхідність підвищення ефективності алгоритмів їх розв'язання. Одним із прикладів дискретних оптимізаційних задач є задача комівояжера, яка використовується для моделювання процесів оптимального планування маршрутів, управління чергами та розподілу обчислювальних ресурсів. Метою роботи є аналіз сучасних методів і алгоритмів дискретної оптимізації, які можуть забезпечити зменшення обчислювальної складності. Особлива увага приділяється комбінаторним методам, зокрема методу гілок та меж, а також евристичним і метаевристичним підходам, серед яких мурашиний та генетичний алгоритми. Зазначено ефективність методів дискретної оптимізації для прикладних задач, що мають велику кількість змінних і належать до класу NP-складних. Це дає можливість не лише скорочувати час обчислень, але й підвищувати точність моделей у різних сферах — від логістики та транспортних перевезень до наукових обчислень і планування ресурсів.

Ключові слова: дискретна оптимізація; задача комівояжера; комбінаторні методи; NP-складність; метод гілок та меж; евристичні алгоритми; мурашиний алгоритм; генетичні алгоритми

Актуальність. Дискретні оптимізаційні задачі широко застосовуються у промисловості, транспортних системах, логістиці, інформаційних технологіях та інших сферах, де необхідно приймати оптимальні рішення. Вони належать до класу NP-складних задач, що обумовлює високі обчислювальні витрати та потребу у використанні сучасних методів оптимізації. Серед них особливе місце займає задача комівояжера, яка є базовою моделлю комбінаторної оптимізації та використовується як тестовий приклад для перевірки алгоритмів. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю вдосконалення методів дискретного програмування та розробки алгоритмів, здатних швидко знаходити оптимальні або наближені рішення.

Мета дослідження — дослідження математичних моделей і методів дискретної оптимізації на прикладі задачі комівояжера, а також аналіз сучасних підходів до її розв'язання з використанням класичних, евристичних та метаевристичних алгоритмів.

Основні завдання

- проаналізувати особливості задач дискретної оптимізації та визначити їх місце в прийнятті рішень у різних сферах діяльності;
- дослідити математичну модель задачі комівояжера як стандартної моделі комбінаторної оптимізації;
- розглянути методи розв'язання задачі комівояжера, зокрема метод гілок та меж, евристичні та метаевристичні алгоритми (жадібні, мурашині, генетичні);
- провести порівняння ефективності різних підходів за критеріями швидкості збіжності та якості отриманих рішень;
- визначити практичні області застосування задачі комівояжера та перспективи вдосконалення алгоритмів дискретної оптимізації.

Дискретні оптимізаційні задачі знаходять широке застосування в різних областях, де використовуються математичні методи аналізу, процесів що відбуваються. Задачі дискретної оптимізації є важливим інструментом підтримки прийняття рішень у різних сферах діяльності людини.

This is an open access article under the CC BY license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.uk>)

Дискретне програмування, як математичний апарат сформувалось давно та є важливою частиною математичного програмування. В даний час це ціле наукове направлення. Розроблені сучасні методи та алгоритми розв'язання задач дискретного програмування. Розроблені пакети прикладних програм, які дозволяють розв'язувати ряд стандартних задач дискретної оптимізації. Однак кожна прикладна задача дискретного характеру відрізняється своїми особливостями та безпосередньою стандартизацією, тобто приведення до існуючих моделей виявляється не простою роботою. Сутність методів дискретної оптимізації, а саме комбінаторних методів, складається в тому як повний перебір кінцевого числа варіантів привести до часткового. Засоби визначення підмножин варіантів, які завідомо не містять оптимального рішення і підлягають відсіюванню, не завжди забезпечують методи комбінаторної оптимізації, здатні оперативно знайти досить якісне або оптимальне рішення. Швидкість збіжності різних алгоритмів залишається проблемою NP-складних задач.

Проста перестановка шуканих величин не вирішує проблеми отримання варіантів рішення. Існують як детерміновані способи підбору значень компонент вектору рішень, а й способи випадкового пошуку. Є процедури покращення варіанта рішення. Сформульовано підходи перевірки оптимальності.

Серед комбінаторних екстремальних задач однією з найпоширеніших є задача комівояжера. Сутність задачі полягає у визначенні оптимальної послідовності виконання деяких робіт. Згідно з найменуванням задачі – відвідати міста, розташовані на різних відстанях. Необхідно відвідати кожне місто, побувавши в ньому лише один раз, повернутися у вихідне місто і при цьому маршрут повинен мати мінімальну довжину пробігу.

Математична модель задачі комівояжера як стандартної моделі дискретної оптимізації має вигляд:

$$Z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall_{ij}.$$

де n – число міст; c_{ij} – відстань між будь-якою парою міст $\langle i, j \rangle$; x_{ij} – величина яку шукають, що визначає включення чи ні пари в циклі об'їзду.

Якщо модель реалізується аналітичними методами рішення, то щоб уникнути розпаду циклу об'їзду на підцикли, вводиться група штучних обмежень типу:

$$u_i - v_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad \forall_{ij}.$$

Стандартна задача комівояжера використовується в багатьох практичних додатках [1]. Приклад використання моделі наведено на рис. 1.

Вихідною інформацією для розв'язання задачі комівояжера є витрати пов'язані з переходом від однієї роботи до іншої. У стандартному формулюванні завдання вихідна інформація – відстань між будь-якою парою міст [2–4]. Оскільки задача розглядається як математична модель комбінаторної оптимізації, то матриця відстаней є несиметричною. У разі симетричної матриці процедура розв'язання дещо модифікується.

Математичну модель задачі комівояжера можна привести до моделі цілочисельного лінійного програмування та розв'язувати аналітичними методами, наприклад, алгоритмом методу Гоморі [3]. Практичний перебір варіантів наводиться до часткового за рахунок алгоритмізації процесу розбиття множини варіантів на підмножини та класичному отриманні оцінок підмножин. Приклад комбінаторних методів розв'язання задачі комівояжера наведено на рис. 2.

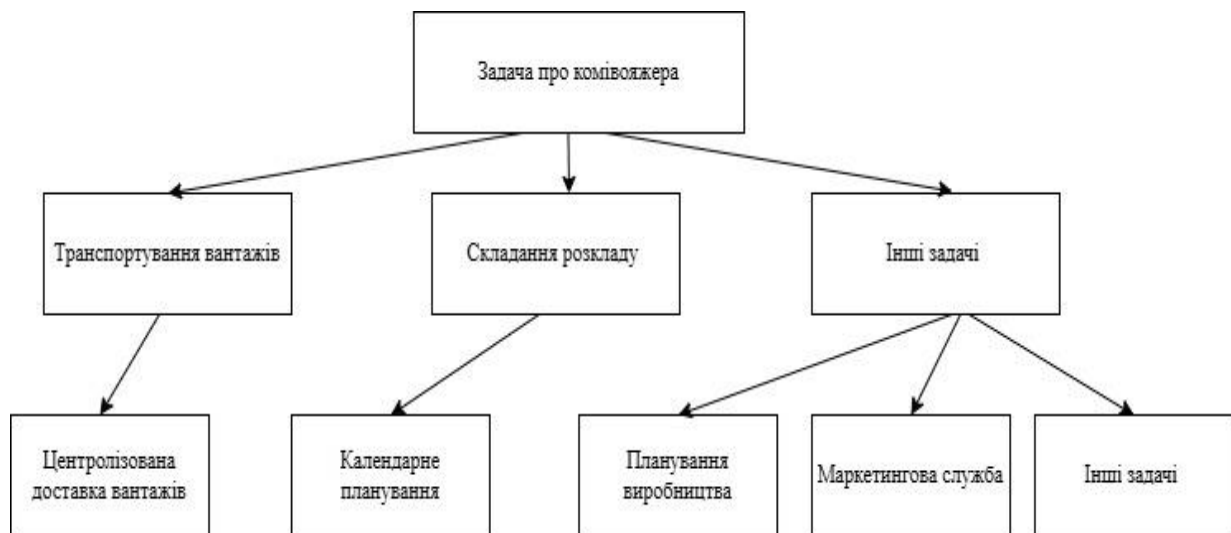


Рис. 1. Приклад використання моделі задачі комівояжера

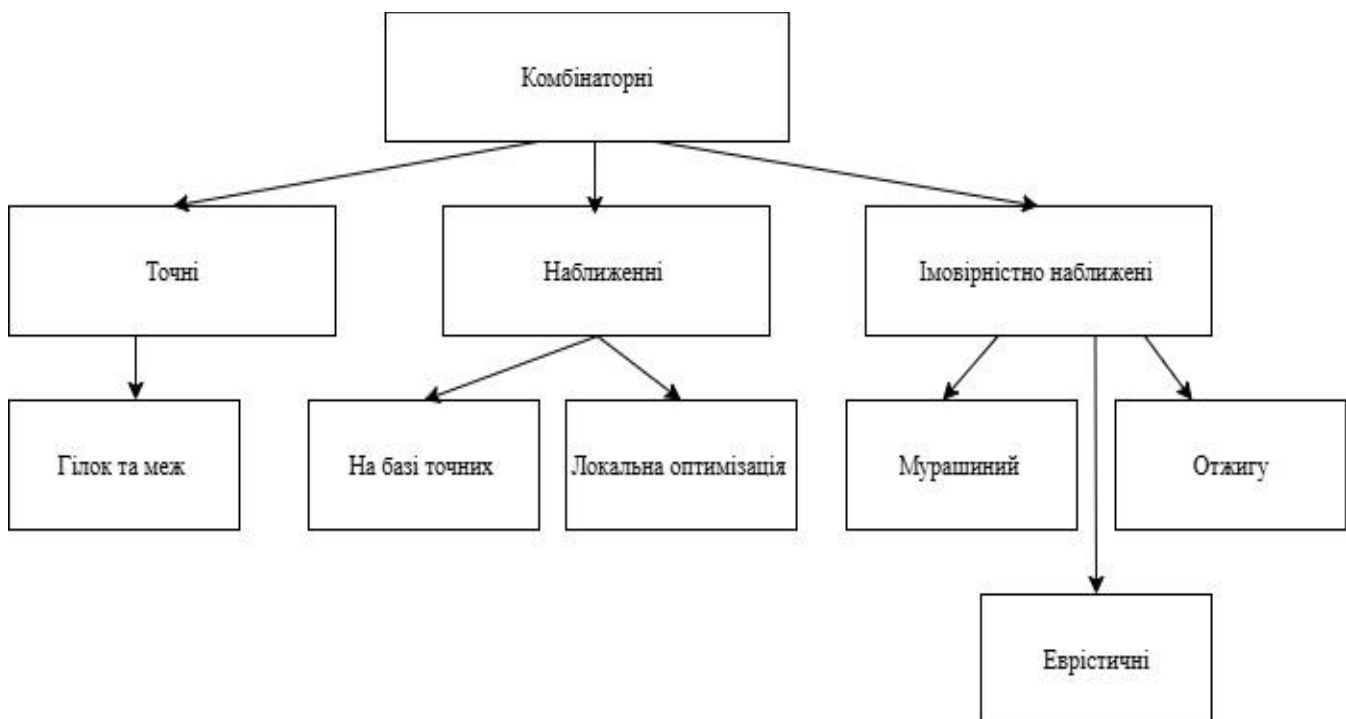


Рис. 2. Наближена класифікація комбінаторних методів

Метод гілок та меж визначає спосіб розбиття множини варіантів на підмножини, отримання оцінок підмножин. На основі формується ознака оптимальності. Вибір параметра розбиття множини варіантів на підмножини це проблема, що підлягає дослідженню. Цей процес базується на ідеї послідовної побудови рішення. Вибирається компонент вектору рішень, конкретизується значенням з допустимої множини, потім початкова множина ділиться на частини, кожна з яких містить варіанти з конкретним значенням компоненти. Питання полягає у виборі компоненти, що підлягає конкретизації. Існують такі підходи: послідовний вибір відповідно до нумерації компонент вектору рішень; застосування жадібного алгоритму; випадковий вибір; вибір на основі частоти появи компоненти з конкретним значенням в експериментальному генеруванні варіантів рішення [4–6].

Процедуру вибору міста прибуття можна подати графічно [3]. Припустимо, що i це місто відправлення, j – місто прибуття. Робиться спроба вибору міста прибуття із сукупності міст, які ще не були відвідані. Іншими словами, пара міст $\langle i, j \rangle$ включається до циклу об'їзду. Далі місто j стає містом відправлення, і далі визначається наступне місто прибуття. Питання, якому місту віддати перевагу (пріоритет). Визначення пріоритету міста прибуття є елементом модифікації алгоритму розв'язання задачі комівояжера. Приклад вибору міста прибуття наведено на рис. 3.

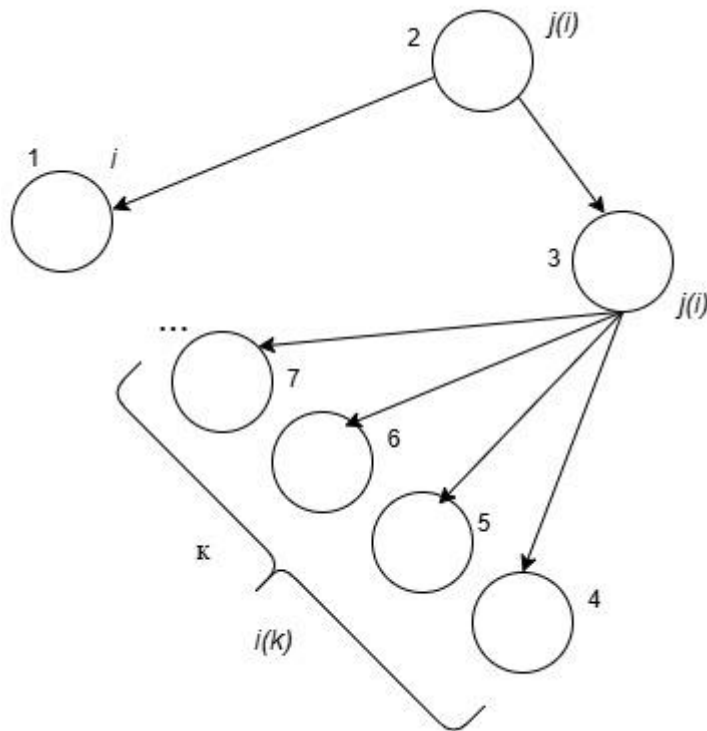


Рис. 3. Вибір пари міст

У мурашиному алгоритмі [7] розв'язання задачі комівояжера, пара міст, що включаються в цикл об'їзду, вибирається випадково відповідно до величини ймовірності. Сама величина ймовірності обчислюється залежно від низки параметрів. Насамперед від інформативності про пару міст (накопичення феромонів), від величини втрати інформації (випаровування феромонів) та відстані між парами. Робота алгоритму є поетапною. На кожному з етапів генерується серія варіантів циклу об'їзду міст. Накопичується досвід. При зміні величини ймовірності використовується символ $\emptyset$. У роботі [8] пропонується змінювати значення залежно від скорочення довжини пробігу під час виконання маршруту. У роботі [2] пропонується надавати бонуси парам міст залежно від частоти її появи в серіях варіантів одержуваних на кожному етапі роботи алгоритму. Це дає покращення швидкості збіжності алгоритму.

Висновок. Математична модель-задача комівояжера є дуже популярною задачею комбінаторної оптимізації. Саме для цієї моделі було розроблено метод гілок та меж [3]. Розроблено безліч модифікацій [5]. Привертають увагу методи, що імітують поведінку комах (мурах), процесів, що відбуваються в природі [9], генетичні методи та інші життєві процеси [10]. Прагнення розробляти швидкодіючі, оперативні алгоритми є життєвою необхідністю, внаслідок того, що задачі класу NP відзначаються значною складністю. Подальші дослідження будуть направлені на розробку ефективних гібридних методів для розв'язання задач класу NP із застосуванням у транспорті, логістиці, виробництві та інформаційних системах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дацко М. В., Цвір Л. Р. «Побудова транспортних маршрутів у логістиці». *Науковий вісник Херсонського державного університету. Сер.: Економічні науки*. 2016; 16 (4): 152–155. – URL: http://ej.kherson.ua/journal/economic_16/economic_16_4.pdf#page=140.
2. Юхименко Б. І., Саранди І. І., Титов, Н. А. «Деякі алгоритмічні питання розв'язання задачі про комівояжера». *Актуальні наукові дослідження у сучасному світі*. 2019; 11 (55): 44–54. – URL: <https://surl.li/uowifn>.
3. Юхименко Б. І. «Методи оптимізації: навчальний посібник». Одеса: ТОВ «НВП и Інтерсервіс». 2012.
4. Михалевич В. С. «Послідовні алгоритми оптимізації та їх застосування». *Кібернетика*. 1965; 1: 45–55; 2: 85–88.
5. Юхименко Б. І., Козіна Ю. Ю. «Порівняльна характеристика алгоритмів методу гілок та кордонів для вирішення завдань цілісного лінійного програмування». *Праці Одеського політехнічного університету*. 2005; 2: 199–204. – URL: <http://surl.li/hbphv>.
6. Тимчук О. С., Проценко Я. А., Парамонов А. І. «Застосування алгоритму мурашиної колонії до вирішення задачі декількох комівояжерів без депо». *Системи обробки інформації*. 2019; 3: 73–78. DOI: <https://doi.org/10.30748/soi.2019.158.08>.
7. Dorigo Marco. “Swarm intelligence, ant algorithms and ant colony optimization”. *Reader for CEU Summer University Course “Complex System”/Dorigo M. Budapest, Central European University*. 2001. p. 1–3.
8. Штовба С. Д. «Мурашині алгоритми: теорія та додатки». *Програмування*. 2005; 31 (4): 3–18. – URL: <http://surl.li/hbpkj>.
9. Леванова Т. В. «Алгоритм мурашиної колонії та імітації відпалу для завдань про р-медіану». *Автоматика та телемеханіка*. 2004; 3: 80–88. – URL: <http://surl.li/hbpne>.
10. Тимофієва Н. К. «Порівняльний аналіз методів, що використовуються для розв'язання задач комбінаторної оптимізації». *Індуктивне моделювання складних систем*. 2015; 7: 259–270.

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.02.2025.34>

UDC 519.6:004.93

On solving combinatorial optimization problems

Birute I. Yukhymenko¹⁾

PhD, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2607-4687>; yukhymenko@op.edu.ua

Oleksandr V Mundrievsky¹⁾

Master of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3525-3580>; 2388073@stud.op.edu.ua

¹⁾ Odesa Polytechnic National University, 1, Shevchenko Ave. Odesa, 65044, Ukraine

ABSTRACT

This work is devoted to the study of discrete optimization problems, which are widely used in industry, logistics, transport systems and information technologies. The study is important due to the complexity of such problems and the need to improve the efficiency of algorithms for their solution. One example of discrete optimization problems is the traveling salesman problem, which is used to model the processes of optimal route planning, queue management and allocation of computational resources. The aim of the work is to analyze modern methods and algorithms of discrete optimization, which can reduce computational complexity. Particular attention is paid to combinatorial methods, in particular the branch and bounds method, as well as heuristic and metaheuristic approaches, including ant and genetic algorithms. The effectiveness of discrete optimization methods for applied problems with a large number of variables and belonging to the class of NP-hard problems is noted. This makes it possible not only to reduce calculation time, but also to increase the accuracy of models in various fields – from logistics and transportation to scientific computing and resource planning.

Keywords: Discrete optimization; traveling salesman problem; combinatorial methods; NP-complexity; branch and bounds method; heuristic algorithms; an algorithm; genetic algorithms