

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.02.2025.68>

УДК : 620.179.16:621.165

Розробка чисельно-аналітичних моделей для розрахунку власних частот коливань валу з тріщиною

Носаль Олександр Юрійович¹⁾

Д-р філософії, ст. викладач каф. Теоретичної, загальної та нетрадиційної енергетики
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3253-9652>; nosal.o.y@op.edu.ua

Акимов Гліб Русланович¹⁾

Студент каф. Теоретичної, загальної та нетрадиційної енергетики
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3506-2366>; 3452750@stud.op.edu.ua

Батанов Андрій Андрійович¹⁾

Студент каф. Теоретичної, загальної та нетрадиційної енергетики
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-3270-5876>; 10515030@stud.op.edu.ua

Лабунський Богдан Віталійович¹⁾

Студент каф. Теоретичної, загальної та нетрадиційної енергетики
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0370-9990>; labunskyi.8865227@stud.op.edu.ua

¹⁾ Національний університет «Одеська політехніка», пр. Шевченка, 1. Одеса, 65044, Україна

АНОТАЦІЯ

Проблема вібраційної діагностики пошкоджень енергообладнання під час експлуатації є надзвичайно актуальною для підвищення надійності та безпеки його роботи. Одним із найбільш небезпечних дефектів, що виникають у валах і роторах парових турбін, є тріщини, розвиток яких може призвести до катастрофічних руйнувань. Тому розробка методів вібраційної діагностики, здатних виявляти докритичні тріщини, має важливе практичне значення. Поєднання сучасних обчислювальних можливостей із САЕ-системами дає змогу здійснювати ефективний аналіз динамічної поведінки конструкцій при різних умовах експлуатації теплоенергетичного обладнання.

У роботі запропоновано чисельно-аналітичний підхід для оцінювання впливу тріщини на зміну жорсткості валопроводу. Основою для побудови моделі є використання положень механіки руйнування та теореми Кастільяно, що дозволяє виразити піддатливість перерізу через співвідношення між швидкістю вивільнення енергії деформації та коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН). Для дослідження згинальних, поздовжніх та крутильних коливань валу з урахуванням наявності тріщини побудовано САЕ-моделі балки круглого поперечного перерізу з крайовою поперечною та напівеліптичною тріщинами. Розглянуто геометричні параметри дефекту, зокрема відносну глибину $\gamma = a/D$ та співвідношення сторін a/b , що визначають характер впливу тріщини на піддатливість.

Отримані вирази для зміни енергії деформації дозволили сформувати аналітичні залежності для визначення піддатливості при різних видах навантаження: згині, розтягуванні та крученні. У випадку згинальних коливань використано залежність КІН від моменту опору перерізу та нормалізованого розподілу напружень; при поздовжніх коливаннях враховано вплив напівеліптичної тріщини та варіацію параметра a/b ; при крученнях — сумісну дію поперечно-зсувних і поздовжньо-зсувних деформацій, що потребувало апроксимації коефіцієнтів функцій F_{II} та F_{III} .

Таким чином, запропонований підхід забезпечує можливість урахування нелінійності поведінки конструкції з тріщиною та створює основу для подальшого розвитку методів вібраційної діагностики валів парових турбін.

Застосування отриманих чисельно-аналітичних моделей сприятиме підвищенню достовірності контролю стану обладнання, продовженню його ресурсу та запобіганню аварійних ситуацій на ТЕС і АЕС.

Ключові слова: чисельно-аналітична модель; власні частоти; вал; тріщина; коефіцієнт інтенсивності напружень; механіка руйнування; ресурс; пошкодження

Актуальність. Проблема вібродіагностики пошкодження енергообладнання при експлуатації є актуальною для підвищення його надійності. Розробка вібраційних методів діагностики ушкодження, чутливих до наявності тріщин докритичного розміру в різного роду конструкціях і машинах, є важливою з точки зору можливості продовження їх ресурсу за допомогою контролю за розвитком тріщини, а також з точки зору запобігання катастрофічних руйнувань.

Вирішення питання ефективності вібраційної діагностики тріщин різного типу при згинальних, поздовжніх і крутильних коливаннях для виявлення поперечної або поздовжньої тріщини в роторах і валопроводі парової турбіни дасть змогу значно підвищити рівень безпеки під час експлуатації теплоенергетичного обладнання яке використовується на ТЕС та АЕС.

This is an open access article under the CC BY license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.uk>)

Спільне використання потужностей сучасної обчислювальної техніки з Computer Aided Engineering (CAE) – системами дозволяє проводити аналіз поведінки конструкцій при різних умовах експлуатації теплоенергетичного обладнання.

Вібраційна діагностика пошкоджень валів парових турбін в процесі експлуатації практично не має альтернативи.

Використання підходів механіки руйнування дозволяє виконати відносно просте і досить точне моделювання для оцінки впливу тріщини на вібраційні характеристики конструкції. Така модель тріщини не призводить до зміни маси об'єкта діагностики, набагато більш точно передбачає зміну власних частот і форм коливань, особливо в разі наявності тріщин втомі. До того ж вона може виявляти нелінійність коливань конструкції з так званою тріщиною, що закривається (тріщина, яка періодично відкривається і закривається під час коливань, змінюючи жорсткість конструкції).

В якості числового методу для вирішення поставленої прикладної задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ), оскільки він широко застосовується для розв'язку задач області механіки деформованого тіла.

Для практичної реалізації вище згаданої методики розроблено геометричну модель валу (балки) круглого поперечного перерізу на двох опорах за умови наявності в ній крайової поперечної та повздовжньої тріщини.

Мета: Розробити чисельно-аналітичні розрахункові моделі які відображають вплив наявності тріщини на зміну жорсткості (піддатливості) механічної системи з використанням підходів механіки руйнування, що є важливим та ключовим аспектом для вирішення задач вібраційної діагностики.

Моделювання піддатливості перерізу валу з тріщиною засноване на використанні теореми Кастільяно з урахуванням співвідношення між швидкістю вивільнення енергії деформації та коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) [1, 2].

Для розробки чисельно-аналітичної розрахункової моделі, яка призначена для дослідження згинальних коливань валу побудовано Computer Aided Design (CAD)-модель балки круглого поперечного перерізу з урахуванням наявності в ній крайової поперечної тріщини, яка розташована посередині з відносною глибиною $\gamma = a/D < 0,6$.

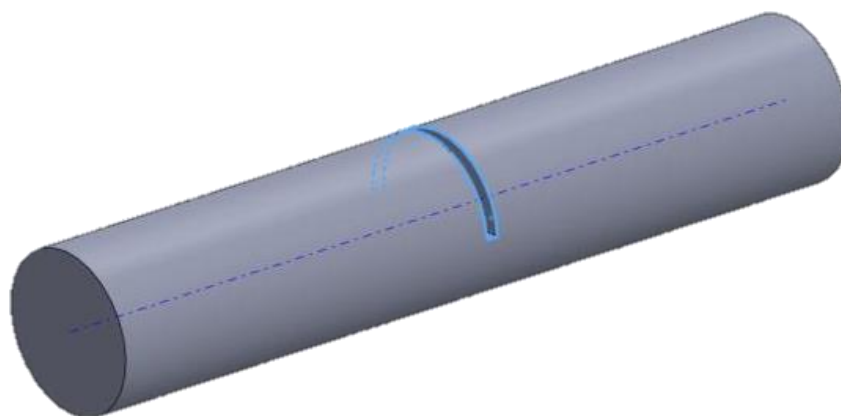


Рис. 1. CAD-модель балки круглого поперечного перерізу з крайовою поперечною тріщиною

Для лінійно-пружного тіла зміна енергії деформації ΔU , яка обумовлена наявністю крайової поперечної тріщини нормального відриву з прямим фронтом, може бути виражено через КІН K_I [3].

$$\Delta U = \frac{b \cdot (1 - \nu^2)}{E} \int_0^a K_I^2 d\alpha, \quad (1)$$

де a – глибина тріщини,
 b – ширина фронту тріщини,
 E – модуль Юнга,
 ν – коефіцієнт Пуассона.

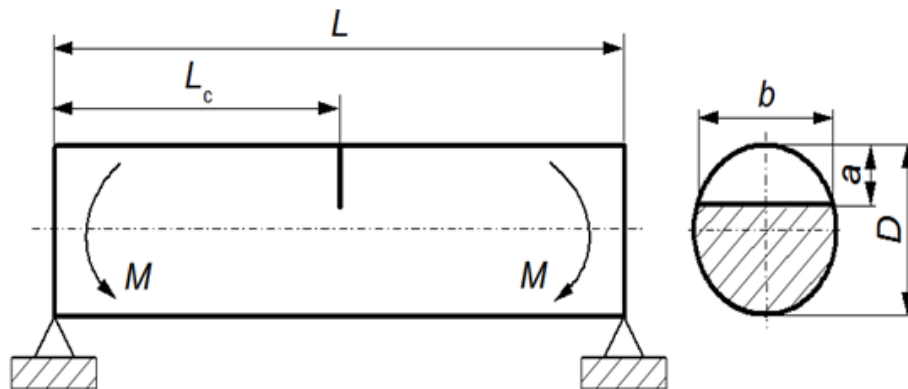


Рис. 2. Розрахункова схема валу на двох опорах з крайовою поперечною тріщиною

Зміну енергії деформації ΔU поперечного перерізу з тріщиною можна виразити через зміну піддатливості цього перерізу δ_0

$$\Delta U = 0,5 \cdot \delta_0 \cdot M^2, \quad (2)$$

де M – згинальний момент в перерізі з тріщиною.

Для крайової тріщини з прямим фронтом при згині валу KIH визначається за формулою [3]:

$$K_I = F_I \cdot \frac{M}{W} \cdot \sqrt{\pi a}, \quad (3)$$

де W – осьовий момент опору перерізу,

γ – відносна глибина тріщини,

F_I – функція нормалізованого розподілу K_I .

$$F_I = 1,105 - 2,6475 \cdot \gamma + 5,6875 \cdot \gamma^2 \quad \gamma = a/D < 0,6;$$

У випадку який розглядається ширину фронту тріщини b можна виразити через її глибину a і діаметр валу D :

$$b = 2\sqrt{a \cdot (D - a)}$$

З врахуванням рівнянь (1) – (3) отримано вираз для визначення зміни піддатливості балки [6]:

$$\delta_0 = \frac{4096 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \sqrt{a \cdot (D - a)}}{\pi \cdot E \cdot D^4} \cdot (0,616 - 1,961 \cdot \gamma + 4,914 \cdot \gamma^2 - 6,031 \cdot \gamma^3 + 5,396 \cdot \gamma^4) \cdot |\overline{M}_i(L_c)|,$$

де L_c – місце розташування тріщини,

$\overline{M}_i(L_c)$ – нормоване значення згинального моменту для i -ї форми коливань неушкодженого валу для перерізу з тріщиною.

Для розробки математичної моделі, яка призначена для дослідження поздовжніх коливань валу необхідно побудувати CAD-модель балки круглого поперечного перерізу з урахуванням наявності в ній крайової поперечної напівеліптичної тріщини, яка розташована посередині.

В процесі побудови напівеліптичної тріщини обов'язково потрібно врахувати її геометричні особливості, такі як глибина тріщини $\gamma = a/D$ та співвідношення сторін тріщини a/b , де a – малий еліптичний радіус, b – великий еліптичний радіус.

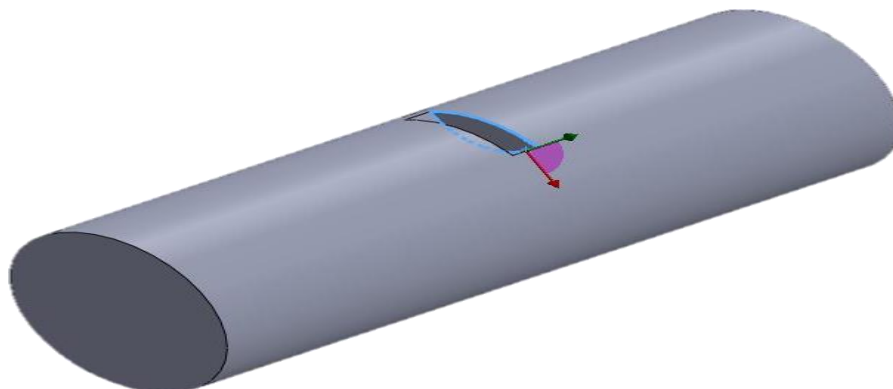


Рис. 3. CAD-модель балки круглого поперечного перерізу з крайовою поперечною напівеліптичною тріщиною

Таблиця 1. Значення a/D та a/b

a/D	0,1	0,2	0,3	0,4	-	-
a/b	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2

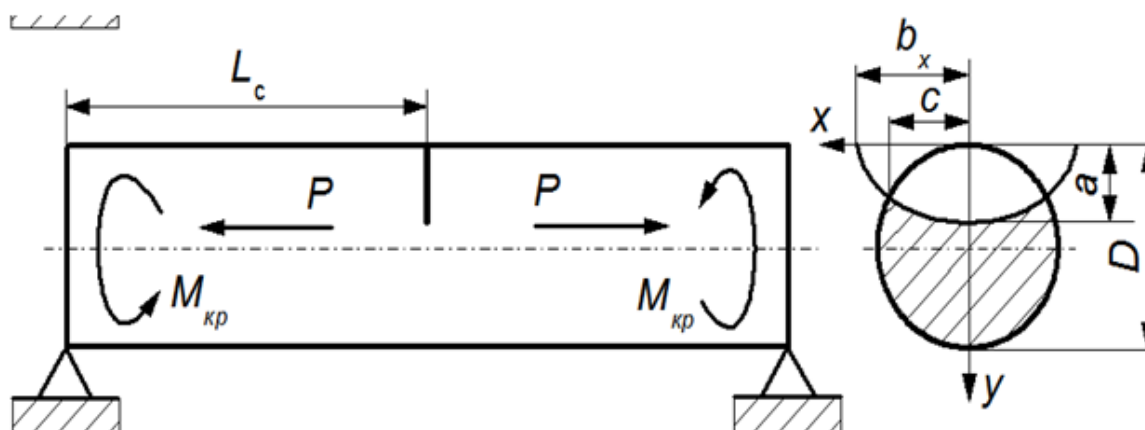


Рис. 4. Розрахункова схема валу на двох опорах з крайовою поперечною напівеліптичною тріщиною

У разі розтягнення валу з крайовою поперечною напівеліптичною тріщиною нормального відриву (рис. 4) зміна енергії деформації ΔU визначається наступним чином [3]:

$$\Delta U = \frac{2}{E} (1 - \nu^2) \int_0^c \int_0^a K_I^2 dx d\alpha, \quad (4)$$

де c – напівширина фронту тріщини.

K_{IH} в цьому випадку визначається за формулою:

$$K_I = F_I \cdot \frac{P}{F} \cdot \sqrt{\pi a}, \quad (5)$$

де P – розтягувальна сила;

F – площа поперечного перерізу.

При $a/b_x = 0,6$, K_{IH} практично не змінюється уздовж фронту тріщини, а функція нормалізованого режиму F_I у виразі (5) може бути виражена таким чином [5]:

$$F_I = 0,797 + 0,58147 \cdot \gamma + 0,424948 \cdot \gamma^2 + 7,862319 \cdot \gamma^3, \gamma = a/D < 0,6.$$

При розтягуванні зміна енергії деформації ΔU перерізу з тріщиною визначається наступним чином:

$$\Delta U = 0,5 \cdot \delta_0 \cdot P^2 \quad (6)$$

Рівняння (4) – (6) дозволяють отримати вираз для визначення зміни піддатливості перерізу з тріщиною при поздовжніх коливаннях [6].

$$\delta_0 = \frac{64c \cdot \gamma^2 (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot D^2} \cdot (0,3176 + 0,308954 \cdot \gamma + 0,253869 \cdot \gamma^2 + 2,605345 \cdot \gamma^3 + 1,66555 \cdot \gamma^4 + 0,954593 \cdot \gamma^5 + 7,727008 \cdot \gamma^6) \cdot |\bar{P}_I(L_c)|,$$

де $|\bar{P}_I(L_c)|$ – нормоване значення поздовжньої сили для i -ї форми коливань валу в перерізі з тріщиною.

У випадку кручення валу з крайовою поперечною напівеліптичною тріщиною (рис. 4) зміну енергії деформації ΔU можна виразити через K_{IH} при поперечно-зсувній і поздовжньо-зсувній деформації (K_{II} і K_{III} відповідно) [3]:

$$\Delta U = \frac{2}{E} \cdot (1 - \nu^2) \int_0^c \int_0^a [K_{II}^2 + (1 + \nu) \cdot K_{III}^2] dx d\alpha, \quad (7)$$

де коефіцієнти інтенсивності напружень K_{II} та K_{III} розраховуються відповідно за формулами:

$$K_{II} = F_{II} \cdot \frac{M_{кр}}{W_p} \cdot \sqrt{\pi a}, K_{III} = F_{III} \cdot \frac{M_{кр}}{W_p} \cdot \sqrt{\pi a},$$

де $M_{кр}$ – крутний момент,

W_p – полярний момент опору,

F_{II} – функція нормального розподілу коефіцієнту інтенсивності напружень K_{II} при поперечно-зсувній деформації,

F_{III} – функція нормального розподілу коефіцієнту інтенсивності напружень K_{III} при поздовжньо-зсувній деформації.

x – це координата для інтегрування по фронту тріщини при визначенні піддатливості перерізу з тріщиною.

Беручи до уваги, що при крученні зміна енергії деформації ΔU перерізу з тріщиною визначається виразом:

$$\Delta U = 0,5 \cdot \delta_0 \cdot M_{кр}^2 \quad (8)$$

Рівняння (7) та (8) дозволяють отримати вираз для визначення зміни піддатливості:

$$\delta_0 = \frac{512 \cdot \gamma^2 \cdot c}{\pi \cdot E \cdot D^4} (1 - \nu^2) \cdot [(e_1 + (1 + \nu) \cdot e_2)] \cdot |\bar{M}_{кр}(L_c)|, \quad (9)$$

де $\bar{M}_{кр}(L_c)$ – нормоване значення крутного моменту

Коефіцієнти e_1 та e_2 отримано з допомогою апроксимації функцій нормального розподілу F_{II} і F_{III} коефіцієнтів інтенсивності напружень при поперечно-зсувній і поздовжньо-зсувній деформації (K_{II} і K_{III} відповідно). Коефіцієнти e_1 і e_2 приведені в табл. 2.

Таблиця 2. Коефіцієнти апроксимаційних функцій [6]

a/D	k_1	k_2	p_0	p_1	p_2	e_1	e_2
0,1	0,8426	0,5911	0,6532	-0,383	0	0,5556	0,2254
0,2	0,8536	0,7143	0,5948	-0,2525	0,1125	0,6498	0,2649
0,4	0,8563	0,8821	0,5349	-0,0371	0,2714	0,7777	0,3757
0,6	0,7586	1,3143	0,4875	-0,2421	1,0732	1,0358	0,6533

У разі еліптичності тріщини $a/b_x = 0,6$, її напівширина визначається за формулою:

$$c = D \sqrt{-1,5625 \cdot \gamma^2 - 0,43945 + 0,61035 \sqrt{10,24 \cdot \gamma^2 + 0,5184}}$$

Отримано аналітичні залежності для визначення піддатливості вала при різних видах навантаження: згин, розтяг та кручення.

Застосування отриманих чисельно-аналітичних моделей сприятиме підвищенню достовірності контролю стану обертового обладнання, продовженню його ресурсу та запобіганню аварійних ситуацій на ТЕС і АЕС.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chondros T. G., Dimarogonas A. D. "Dynamic sensitivity of structures to cracks". *J. Of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*. 1989; 111: 251–256.
2. Chondros T. G. "The continuous crack flexibility method for crack identification". *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2001; 24: 643–650.
3. Murakami Y. "Stress intensity factors handbook. VoL. I and VoL. II". *The Society of Materials Sci., Japan and Pergamon Press*. 1987.
4. Ismail A. E., Ariffin A. K., Abdullah S., Ghazali M. J., Daud R. "Mode III stress intensity factors of surface crack in round bars". *Advanced Materials Research*. 2011; 214: 192–196.
5. Carpinteri A. "Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial Loading". *Int. J. of Fatigue*. 1993; 15: 21–26.
6. Бовсуновський А. П., Носаль О. Ю. «Вплив тріщин на власні частоти коливань ступінчастих валів парових турбін». *Сучасні проблеми наукового забезпечення енергетики: Матеріали XIX Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених і студентів*, Київ, Україна. 2021. С. 203–204.

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.02.2025.68>

UDC: 620.179.16:621.165

Development of numerical-analytical models for calculating the natural frequencies of vibrations of a shaft with a crack

Oleksandr Yu. Nosal¹⁾

Ph D., Senior Lecturer of the Department of Theoretical General and Nonconventional Power Engineering
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3253-9652>; nosal.o.y@op.edu.ua

Hlib R. Akymov¹⁾

Student of the Department of Theoretical General and Nonconventional Power Engineering
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3506-2366>; 3452750@stud.op.edu.ua

Andrii A. Batanov¹⁾

Student of the Department of Theoretical General and Nonconventional Power Engineering
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-3270-5876>; 10515030@stud.op.edu.ua

Bohdan V. Labunskyi¹⁾

Student of the Department of Theoretical General and Nonconventional Power Engineering

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0370-9990>; labunskyi.8865227@stud.op.edu.ua

¹⁾ Odesa Polytechnic National University, 1, Shevchenko Ave. Odesa, 65044, Ukraine

ABSTRACT

The problem of vibration diagnostics of damage to power equipment during operation is extremely relevant for increasing the reliability and safety of its operation. One of the most dangerous defects that occur in shafts and rotors of steam turbines is cracks, the development of which can lead to catastrophic failures. Therefore, the development of vibration diagnostics methods capable of detecting subcritical cracks is of important practical importance. The combination of modern computing capabilities with CAE systems allows for effective analysis of the dynamic behavior of structures under various operating conditions of thermal power equipment.

The paper proposes a numerical-analytical approach to assess the impact of a crack on the change in shaft stiffness. The basis for building the model is the use of the provisions of fracture mechanics and the Castigliano theorem, which allows expressing the compliance of the section through the ratio between the rate of deformation energy release and *stress intensity coefficients (SIF)*. To study the bending, longitudinal and torsional vibrations of the shaft, taking into account the presence of a crack, CAD models of a beam of circular cross-section with edge transverse and semi-elliptical cracks were built. The geometric parameters of the defect were considered, in particular the relative depth $\gamma = a/D$ and the aspect ratio a/b , which determine the nature of the crack's influence on compliance.

The obtained expressions for the change in the strain energy allowed us to form analytical dependencies for determining compliance under different types of loading: bending, tension and torsion. In the case of bending vibrations, the dependence of the *SIF* on the moment of resistance of the section and the normalized stress distribution were used; in the case of longitudinal vibrations, the influence of a semi-elliptical crack and the variation of the parameter a/b were taken into account; in the case of torsion, the combined effect of transverse-shear and longitudinal-shear deformations was taken into account, which required approximation of the coefficients of the F_{II} and F_{III} functions. Thus, the proposed approach provides the possibility of taking into account the nonlinear behavior of the structure with a crack and creates a basis for further development of methods for vibration diagnostics of steam turbine shafts.

The use of the obtained numerical-analytical models will contribute to increasing the reliability of equipment condition monitoring, extending its service life and preventing emergency situations at thermal power plants and nuclear power plants.

Keywords: NUmerical-analytical model; natural frequencies; shaft, crack; stress intensity factor; fracture mechanics; service life; damage